DU MOUVEMENT DES ABSIDES DES SATELLITES DE JUPITER.

PAR MR. L. EULER.

I.

En comparant le mouvement des Satellites de Jupiter avec celui de la Lune, il ſemble d'abord que celui-ci doit être aſſujetti à de plus grandes irrégularités que celui-là. La force du Soleil, qui agit ſur la Lune & en trouble le mouvement, qu'elle pourſuivroit en vertu de la force de la Terre, y tient un beaucoup plus grand rapport, que celui de la force dont le Soleil agit ſur les Satellites de Jupiter à celle de Jupiter même. Trois raiſons concourent à nous perſuader que le mouvement des Satellites de Jupiter doit être moins irrégulier que le mouvement de la Lune. La premiere eſt la grande maſſe du corps de Jupiter, laquelle ſurpaſſe environ 200 fois celle de la Terre; ſi donc les autres circonſtances étoient ſemblables, les dérangemens cauſés par la force du Soleil devroient être autant de fois plus petits dans les Satellites de Jupiter que dans la Lune. La ſeconde raiſon eſt la diſtance plus grande de Jupiter au Soleil; & il eſt certain que ſi la Terre ſe trouvoit à la diſtance de Jupiter, les inégalités dans le mouvement de la Lune ſeroient preſque imperceptibles. La troiſieme raiſon eſt que la diſtance des Satellites au centre de Jupiter eſt plus petite que celle de la Lune au centre de la Terre, au moins par rapport à la groſſeur de cette planete; puiſque le quatrieme Satellite n'en eſt éloigné que de 25 demi-diametres de Jupiter, pendant que la diſtance de la Lune égale environ ſoixante demi-diametres de la Terre; & le premier Satellite n'en étant éloigné que de $5\frac{2}{3}$ demi-diametres de Jupiter, ſe trouve

ve même à une distance moindre que celle de la Lune à la Terre. D'où il s'ensuit que, selon le système commun d'attraction, le mouvement des Satellites de Jupiter devroit être beaucoup moins irrégulier que le mouvement de la Lune.

2. Aiant donc assez heureusement déterminé par la Théorie les inégalités du mouvement de la Lune, il semble que la même Théorie nous devroit découvrir les inégalités dans le mouvement des Satellites de Jupiter. Pour cet effet, nous n'aurions qu'à supposer 1°. la masse de la Terre environ 200 fois plus grande qu'elle n'est effectivement, 2°. sa distance au Soleil égale à celle de Jupiter, & 3°. la distance de la Lune à la Terre égale à celle de quelque Satellite au centre de Jupiter; alors le calcul tiré de la Théorie devroit donner toutes les inégalités du mouvement des Satellites. Or, en faisant cette application du calcul, on s'appercevra aisément que toutes les inégalités se réduiroient presque à rien, de sorte qu'il en faudroit conclure que le mouvement des Satellites, & surtout du premier, seroit presque entierement conforme aux loix découvertes par *Képler*. Le mouvement des absides, dont la détermination a été si embarassante pour la Lune, n'auroit presque plus de difficultés en faisant l'application aux Satellites de Jupiter, & le calcul montrera presque immobiles les lignes des absides de chaque Satellite, pendant que l'apogée de la Lune avance par an d'environ 40°. Il est vrai que les Satellites de Jupiter, entant qu'ils s'attirent mutuellement, doivent causer quelque dérangement dans leur mouvement, dont les lignes des absides se ressentent le plus sensiblement; mais, puisque les masses des Satellites sont fort petites par rapport à celle de Jupiter, & qu'ils ne s'approchent jamais tant entr'eux, que leur distance devienne assez petite par rapport à celle de Jupiter même, pour qu'il en résulte un effet considérable, il s'ensuit que l'action mutuelle ne sauroit être regardée comme une source considérable d'inégalité.

3. Nonobstant toutes ces raisons, je crois qu'on se tromperoit beaucoup, si l'on vouloit assurer que le mouvement des Satellites

tes

tes de Jupiter fût à peu près régulier, & que les anomalies qu'on y obſerve ne provinſſent que de l'excentricité de leurs orbites & d'un petit mouvement de leurs abſides. Les obſervations ſemblent plutôt prouver que le mouvement des Satellites, & particulierement du premier, qui, par les raiſons alléguées, devroit être le plus régulier, eſt aſſujetti à quelques inégalités très conſidérables, qui ſe découvrent ſurtout dans un mouvement extrèmement rapide de la ligne des abſides, qui ſurpaſſe même de beaucoup celui de l'apogée de la Lune. Cette circonſtance, qui paroit d'abord contraire à l'hypotheſe de la gravitation univerſelle, en eſt plutôt une conſéquence auſſi néceſſaire que remarquable, comme je le prouverai inconteſtablement par les recherches ſuivantes. En effet, il doit paroitre fort étrange que ce mouvement rapide des abſides dans les orbites des Satellites de Jupiter ſe trouve en contradiction avec la Théorie ſur laquelle le mouvement de la Lune eſt fondé, & qu'il ſoit néanmoins une ſuite néceſſaire de la gravitation univerſelle: mais une ſeule conſidération levera tous les doutes. En déterminant le mouvement de la Lune on ſuppoſe que les corps céleſtes s'attirent mutuellement en raiſon réciproque du quarré de leurs diſtances, conformément à la loi générale ſuivant laquelle toutes les parties de la matiere agiſſent les unes ſur les autres. Mais cette même loi ne ſauroit avoir lieu dans les corps finis, qu'entant qu'ils ſont ſphériques, ou qu'ils ont leurs momens d'inertie égaux entr'eux. Donc le corps de la Terre n'étant pas parfaitement ſphérique, la loi ſuppoſée en ſouffre bien quelque altération, mais qui n'eſt d'aucune conſéquence dans le mouvement de la Lune. Or on ſait que le corps de Jupiter differe très conſidérablement de la figure ſphérique, & je ferai voir que cette circonſtance altere la raiſon réciproque doublée des diſtances, au point que le phénomene mentionné en doit être produit.

4. Il faut donc bien remarquer que les corps céleſtes ne s'attirent mutuellement en raiſon réciproque quarrée des diſtances qu'entant que leurs corps peuvent être regardés comme ſphériques, ou que leurs diſtances ſont pluſieurs fois plus grandes que leurs diametres.

C'eſt la raiſon pour laquelle, quoique la Terre ne ſoit pas ſphérique, il n'en réſulte aucune altération ſenſible à la diſtance de la Lune, qui ſurpaſſe trente fois le diametre de la Terre: or, ſi la Lune n'en étoit éloignée que de deux ou trois diametres, l'altération dans la loi d'attraction cauſeroit un mouvement aſſez ſenſible dans la ligne des abſides, bien que la figure de la Terre differe fort peu d'une ſphere parfaite. Mais le cas de Jupiter avec ſes Satellites eſt bien différent, le diametre de ſon équateur étant à l'axe de rotation comme 9 à 8, pendant que dans la Terre ce rapport n'eſt que de 201 à 200; d'où la loi d'attraction de Jupiter doit différer beaucoup plus conſidérablement de la raiſon réciproque quarrée des diſtances, & cela d'autant plus que la diſtance ſera plus petite. Outre cela, les diſtances des Satellites au centre de Jupiter ſont à proportion beaucoup plus petites que celle de la Lune à la Terre, attendu que le premier Satellite n'eſt éloigné du centre de Jupiter que de trois de ſes diametres, & le quatrieme encore moins que de treize. Ces deux circonſtances jointes enſemble cauſeront une aſſez grande altération dans la force attractive de Jupiter pour en produire une très conſidérable dans le mouvement de la ligne des abſides, ſurtout pour le premier Satellite, dont le mouvement devroit être le plus régulier, ſi le corps de Jupiter étoit ſphérique. Voilà donc une nouvelle ſource d'inégalités qu'on découvre dans le mouvement des corps céleſtes, & qu'on ne ſauroit expliquer par l'hypotheſe commune, où l'on ſuppoſe les forces réciproquement proportionelles aux quarrés des diſtances: mais cette même circonſtance ſert à porter le principe de l'attraction univerſelle au plus haut degré de certitude.

5. Pour mettre cela dans tout ſon jour, il faut commencer par chercher la force dont un corps non ſphérique agit ſur un autre corps ſitué à un endroit quelconque, en ſuppoſant que tous les élémens de matiere s'attirent mutuellement en raiſon réciproque quarrée des diſtances. J'ai déjà donné autrefois la ſolution de ce probleme, & ainſi je me contenterai d'en rapporter ici le réſultat. Soit donc I le centre
Planche IX. d'inertie du corps dont nous cherchons la force attractive, & que les
Fig. 5. lignes A*a*, B*b*, C*c* ſoient ſes trois axes principaux, ſelon les princi-

pes

pes de la connoiſſance mécanique des corps, que j'ai établis dans un Mémoire particulier. Que la lettre M exprime la maſſe entiere de ce corps, & que les momens d'inertie par rapport aux trois axes principaux reſpectivement ſoient Maa, Mbb, Mcc. Soit maintenant une molécule de matiere dans un lieu quelconque Z, où au lieu d'une molécule il eſt permis de ſuppoſer un corps ſphérique quelconque, dont le centre ſoit en Z; & même une autre figure quelconque n'influeroit pas ſenſiblement ſur la force dont ce corps eſt attiré vers le premier, de ſorte que dans la ſuite ce corps nous puiſſe repréſenter les Satellites de Jupiter, pendant que le premier eſt pris pour le corps de Jupiter. Pour tenir compte du lieu de ce corps, qu'on abaiſſe de Z au plan formé par les deux axes principaux Aa, Bb la perpendiculaire ZY, & de Y à l'axe Aa prolongé à angles droits la droite YX. Qu'on nomme alors ces trois coordonnées $TX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$, & outre cela la diſtance $IZ = v$, de ſorte que $v = \sqrt{(xx + yy + zz)}$. Cela poſé, la force dont le corps en I agit ſur le corps en Z, ſe réduit à trois forces appliquées au point Z ſelon les directions $Z\alpha$, $Z\beta$, $Z\gamma$ paralleles aux trois axes principaux Aa, Bb, Cc, & poſant N la maſſe du corps en Z, ces trois forces ont été trouvées

$$\text{force ſelon } Z\alpha = \frac{MNx}{v^3}\left(1 + \frac{3aa}{2vv}\left(3 - \frac{5xx}{vv}\right) + \frac{3bb}{2vv}\left(1 - \frac{5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force ſelon } Z\beta = \frac{MNy}{v^3}\left(1 + \frac{3bb}{2vv}\left(3 - \frac{5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right) + \frac{3aa}{2vv}\left(1 - \frac{5xx}{vv}\right)\right)$$

$$\text{force ſelon } Z\gamma = \frac{MNz}{v^3}\left(1 + \frac{3cc}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right) + \frac{3aa}{2vv}\left(1 - \frac{5xx}{vv}\right) + \frac{3bb}{2vv}\left(1 - \frac{5yy}{vv}\right)\right).$$

6. Dans

6. Dans ces formules, qu'une approximation a fournies, on ſuppoſe que la diſtance v eſt conſidérablement plus grande que les quantités a, b, c, de ſorte que les termes négligés, qui ſont diviſés par de plus hautes puiſſances de v, ne ſoient d'aucune conſéquence, d'où il ſemble que ces formules pourroient être défectueuſes quand il s'agit des Satellites de Jupiter & ſurtout du premier où la diſtance v n'excede les quantités a, b, c qu'environ $9\frac{1}{2}$ fois. Mais il faut auſſi remarquer que ces mêmes formules ſeroient tout à fait exactes, ſi les trois momens d'inertie Maa, Mbb, Mcc, étoient égaux entr'eux, d'où l'on comprend que plus ces momens approchent de l'égalité, moins ils s'écarteront de la vérité, quand même la diſtance v ne ſeroit pas aſſez conſidérable. Donc, puiſque dans le corps de Jupiter les quantités a, b, c, ne s'écartent pas beaucoup de la raiſon d'égalité, l'erreur de nos formules deviendra tout à fait inſenſible, de ſorte que quand même la diſtance v excéderoit moins de 9 fois les quantités a, b, c, il n'y auroit rien à craindre pour la juſteſſe du calcul.

7. Si tous les trois momens principaux d'inertie du corps de Jupiter étoient inégaux entr'eux, il faudroit pour chaque inſtant connoitre la ſituation des trois axes pricipaux pour y rapporter le lieu du Satellite Z, & partant le mouvement de rotation de Jupiter entreroit dans le calcul. Mais, puiſque l'inégalité de ces momens eſt cauſée par le mouvement de rotation, ſi nous ſuppoſons que Jupiter tourne autour de l'axe CIc, les deux autres axes Aa & Bb ſe trouveront dans le plan de ſon équateur où la force centrifuge étant partout la même, il faut conclure que les momens d'inertie par rapport à ces deux axes Aa & Bb ſont égaux entr'eux, & la même égalité de momens aura auſſi lieu pour tous les axes pris dans le plan de l'équateur. Il n'y aura donc plus de diſtinction entre les axes tirés dans le plan de l'équateur; & partant, pourvu que l'axe de rotation Cc conſerve toujours la même direction, comme on peut le ſuppoſer, le plan de l'équateur déterminé par les axes Aa, Bb ſera fixe, & les lignes Aa & Bb pourront être regardées comme fixes & indépendantes du mouvement

de

de rotation; ce qui nous procure la commodité de rapporter le lieu des Satellites de Jupiter au plan de ſon équateur, en y prenant à volonté une ligne IA pour fixe, ſans aucun égard au mouvement de rotation.

8. Ayant donc pour le corps de Jupiter $aa = bb$, les trois forces dont le Satellite en Z eſt ſollicité ſeront exprimées ainſi:

force ſelon $Z\alpha = \frac{MNx}{v^3}\left(1 + \frac{3aa}{2vv}\left(4 - \frac{5xx - 5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$

force ſelon $Z\beta = \frac{MNy}{v^3}\left(1 + \frac{3aa}{2vv}\left(4 - \frac{5xx - 5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$

force ſelon $Z\gamma = \frac{MNz}{v^3}\left(1 + \frac{3aa}{2vv}\left(2 - \frac{5xx - 5yy}{vv}\right) + \frac{3cc}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$.

Or, puiſque $xx + yy = vv - zz$, ces formules ſe réduiſent aux ſuivantes:

force ſelon $Z\alpha = \frac{MNx}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$

force ſelon $Z\beta = \frac{MNy}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$

force ſelon $Z\gamma = \frac{MNz}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$

d'où l'on voit que, ſi le corps de Jupiter étoit ſphérique, ou $cc = aa$,

ces

ces trois forces se réuniroient dans une seule suivant la direction ZI qui seroit $= \frac{MN}{vv}$, ou réciproquement proportionelle au quarré de la distance, comme on le suppose ordinairement. Mais il est aussi clair qu'entant que le corps de Jupiter n'est pas sphérique, la force dont il agit sur les Satellites s'écarte un peu de la raison réciproque du quarré des distances, & cela d'autant plus que le Satellite en est moins éloigné. Or, pour de grandes distances, cette aberration s'évanouit entierement.

9. Puisque cette aberration dépend de l'inégalité des quantités aa & cc, voyons à combien elle peut monter effectivement. Considérons donc le corps de Jupiter comme un sphéroïde applati, & soit f la moitié de son axe IC, & h le demi-diametre de son équateur IA $=$ IB. Cela posé, *Newton* a conclu par la rapidité du mouvement de rotation que $f : h = 8 : 9$, ou bien $f = \frac{8}{9} h$, en supposant le corps de Jupiter composé d'une matiere homogene. De là, si nous cherchons les momens d'inertie, nous trouvons

$$cc = \tfrac{2}{5} hh \qquad \& \qquad aa = bb = \tfrac{1}{5}(ff + hh)$$

donc $$cc - aa = \tfrac{1}{5}(hh - ff)$$

& partant $cc - aa = \frac{17}{405} hh$ ou $cc - aa = \frac{1}{24} hh$

à peu près. Or, puisque h est le demi-diametre de l'équateur de Jupiter, il est en même tems la mesure des distances moyennes des Satellites, & les Astronomes ont déterminé ces distances de cette sorte.

Distances moyennes au centre de Jupiter:

du premier Satellite $= 5\frac{2}{3} h$

du second Satellite $= 9 h$

du troisieme Satellite $= 14\frac{1}{3} h$

du quatrieme Satellite $= 25\frac{1}{4} h$.

10. Je

10. Je n'ai pas ici dessein de déterminer exactement le mouvement des Satellites de Jupiter, mais je me propose uniquement d'en rechercher les inégalités qui doivent résulter de la figure non sphérique du corps de Jupiter. Dans cette vue je ne tiendrai compte, ni de la force du Soleil, ni de celle dont les Satellites agissent mutuellement les uns sur les autres: & partant je ne considérerai que les trois forces selon $Z\alpha$, $Z\beta$ & $Z\gamma$, dont chaque Satellite est sollicité par l'attraction de Jupiter. Supposons donc un Satellite quelconque en Z, dont le lieu est déterminé par les trois coordonnées $IX = x$, $XY = y$ & $XZ = z$.

Prenant l'élément du tems dt constant, le mouvement du Satellite sera déterminé par les trois équations suivantes

$$ddx = -\frac{2Mgx\,dt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$ddy = -\frac{2Mgy\,dt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$ddz = -\frac{2Mgz\,dt^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

où il faut remarquer que g est une telle constante que, si nous supposons la masse du Soleil $= L$, la distance moyenne de la Terre au Soleil $= e$, & l'angle que la Terre décrit autour du Soleil pendant le tems dt par son mouvement moyen $= d\zeta$, on aura $2g\,dt^2 = \frac{e^3 d\zeta^2}{L}$.

11. Donc, si au lieu de l'élément du tems dt, nous introduisons dans le calcul le mouvement moyen du Soleil $d\zeta$ qui répond à ce tems, & que nous posions le rapport de la masse de Jupiter M à celle du Soleil L comme 1 à n, nous aurons $M = nL$ & $2Mg\,dt^2 = ne^3 d\zeta^2$; nos équations différentio-différentielles pour le mouvement du Satellite seront:

ddx

$$ddx = \frac{-ne^3 x d\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$ddy = \frac{-ne^3 y d\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(1 - \frac{5zz}{vv}\right)\right)$$

$$ddz = \frac{-ne^3 z d\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\left(3 - \frac{5zz}{vv}\right)\right).$$

Ou bien on pourra auſſi réduire ces déterminations au mouvement moyen du même Satellite, en poſant $n = 1$, & prenant e égale à la diſtance moyenne du Satellite au centre de Jupiter: alors ζ marquera l'angle décrit par le mouvement moyen, pendant un tems propoſé: & il faut ſe ſouvenir que le tems périodique de chaque Satellite qui répond à $\zeta = 360°$ eſt

pour le I. Satellite	=	$1^j, 18^h, 27', 34''$
pour le II. Satellite	=	$3^j, 13^h, 13', 42''$
pour le III. Satellite	=	$7^j, 3^h, 42', 36''$
pour le IV. Satellite	=	$16^j, 16^h, 32', 9''$.

12. Le cas le plus aiſé à réſoudre eſt ſans doute lorſque le Satellite ſe meut dans le plan de l'équateur de Jupiter, ou qu'il ſe trouve en Y. Alors, puiſque $z = 0$, nous aurons ces deux équations:

$$ddx = \frac{-ne^3 x d\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\right)$$

$$ddy = \frac{-ne^3 y d\zeta^2}{v^3}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\right)$$

où $vv = xx + yy$. De là nous tirons premierement

$$yddx - xddy = 0 \quad \text{\& partant } ydx + xdy = -Cd\zeta.$$

Enſuite, à cauſe de $xdx + ydy = vdv$,

$$2dxddx + 2dyddy = \frac{-2ne^3 dv d\zeta^2}{vv}\left(1 + \frac{3(cc-aa)}{2vv}\right)$$

dont

dont l'intégration fournit

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 = 2ne^3\mathrm{d}\zeta^2\left(D + \frac{1}{v} + \frac{(cc-aa)}{2v^3}\right).$$

Soit l'angle XIY $= \phi$ pour avoir $x = v\,\mathrm{cos}\,\phi$ & $y = v\,\mathrm{sin}\,\phi$ & partant $\mathrm{d}x = \mathrm{d}v\,\mathrm{cos}\,\phi - v\mathrm{d}\phi\,\mathrm{f}\,\phi$ & $\mathrm{d}y = \mathrm{d}v\,\mathrm{f}\,\phi + v\mathrm{d}\phi\,\mathrm{cos}\,\phi$; cette ſubſtitution nous conduit à ces deux équations

$$-vv\mathrm{d}\phi = -C\mathrm{d}\zeta \text{ \& } \mathrm{d}v^2 + vv\mathrm{d}\phi^2 = 2ne^3\mathrm{d}\zeta^2\left(D + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3}\right).$$

Poſons $C = \sqrt{2ne^3E}$ pour avoir $\mathrm{d}\zeta = \frac{vv\mathrm{d}\phi}{\sqrt{2ne^3E}}$, & de là

$$\mathrm{d}v^2 + vv\mathrm{d}\phi^2 = \frac{v^4\mathrm{d}\phi^2}{E}\left(D + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3}\right), \text{ ou}$$

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{v^4} = \frac{\mathrm{d}\phi^2}{E}\left(D + \frac{1}{v} - \frac{E}{vv} + \frac{cc-aa}{2v^3}\right).$$

13. Introduiſons l'anomalie vraie, qui ſoit $= s$, & poſons $v = \frac{p}{1 + q\,\mathrm{cof}\,s}$, où par la nature de l'anomalie l'élément dv doit s'évanouir en poſant tant $s = 0$ que $s = 180°$. Cette double condition donne

$$D + \frac{1+q}{p} - \frac{E(1+q)^2}{pp} + \frac{(cc-aa)(1+q)^3}{2p^3} = 0 \text{ \&}$$

$$D + \frac{1-q}{p} - \frac{E(1+q)^2}{pp} + \frac{(cc-aa)(1-q)^3}{2p^3} = 0$$

& en prenant tant la différence que la ſomme

$$\frac{2q}{p} - \frac{4Eq}{pp} + \frac{(cc-aa)(bq+2q^3)}{2p^3} = 0$$

$$2D + \frac{2}{p} - \frac{2E(1+qq)}{pp} + \frac{(cc-aa)(1+3qq)}{p^3} = 0.$$

Au lieu de chercher de là les quantités p & q, déterminons en plutôt les constantes D & E, que nous trouverons

$$E = \tfrac{1}{2}p + \frac{(cc-aa)(3+qq)}{4p} \quad \&$$

$$D = -\frac{1+qq}{2p} + \frac{(cc-aa)(1-qq)^2}{4p^3}.$$

Par ces substitutions notre équation prendra cette forme

$$\frac{dv^2}{v^4} = \frac{d\Phi^2}{E} \cdot \frac{qq\sin s^2}{2p}\left(1 + \frac{cc-aa}{2pp}(-3-2q\cos s+qq)\right)$$

donc $\dfrac{dv}{vv} = \dfrac{q\,d\Phi\sin s}{\sqrt{2Ep}}\sqrt{\left(1 - \dfrac{(cc-aa)(3+2q\cos s-qq)}{2pp}\right)}$

& $d\zeta = \dfrac{vv\,d\Phi}{\sqrt{2ne^3E}}$ ou $d\Phi = \dfrac{d\zeta\sqrt{2ne^3E}}{vv}$.

14. De là il est clair que les quantités p & q sont constantes, dont celle-là marque le demi-parametre de l'orbite & celle-ci l'excentricité. Donc, puisque $\dfrac{dv}{vv} = \dfrac{q\,ds\sin s}{p}$, nous aurons

$$ds = \frac{p\,d\Phi}{\sqrt{2Ep}}\sqrt{\left(1 - \frac{(cc-aa)(3+2q\cos s-qq)}{2pp}\right)}, \quad \text{ou bien}$$

$$d\Phi = \frac{ds\sqrt{(pp+\tfrac{1}{2}(cc-aa)(3+qq))}}{\sqrt{(pp-\tfrac{1}{2}(cc-aa)(3+2q\cos s-qq))}}.$$

Or nous avons vu que $cc - aa = \tfrac{1}{24}hh$, prenant h pour le demi-diametre de l'équateur de Jupiter, & partant nous aurons assez exactement

$$d\Phi = ds\left(1 + \frac{(cc-aa)(3+q\cos s)}{2pp}\right)$$

d'où

d'où nous tirons par l'intégration

$$\Phi = \text{Conſt.} + \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\right)s + \frac{(cc - aa)\,q \sin s}{2pp}.$$

Suppoſons que le Satellite ait paſſé par l'endroit où il eſt le plus proche de Jupiter; il s'en éloignera le plus qu'il eſt poſſible après avoir parcouru l'angle $\Phi = \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\right) 180°$, & il ne retournera à l'endroit le plus proche qu'après avoir parcouru l'angle $= \left(1 + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\right) 360°$.

15. Ici il faut conſidérer que $\Phi - s$ exprime la longitude de la ligne des abſides, de ſorte que nous ayons en regardant ſeulement le mouvement moyen

$$\Phi - s = \text{Conſt.} + \frac{3(cc - aa)}{2pp}\,s$$

ou $$\Phi - s = \text{Conſt.} + \frac{3(cc - aa)}{2pp + 3(cc - aa)}\,\Phi.$$

Donc, pendant une révolution entiere du Satellite, où $\Phi = 360°$, les abſides avanceront par un angle

qui eſt $$= \frac{3(cc - aa)}{2pp + 3(cc - aa)}\,360°,$$

& poſant maintenant $cc - aa = \frac{1}{24}hh$, cet avancement périodique ſera $= \frac{hh}{8pp + hh} \cdot 360°$, où p exprime à peu près la diſtance moyenne du Satellite au centre de Jupiter.

16. Appliquons cette formule à chaque Satellite ſéparément, & pour le premier Satellite ayant $p = 5\frac{2}{3}h$ & partant $8pp =$

$257hh$, ſes abſides avanceront pendant chaque révolution ou dans l'eſpace de $1^j. 18^h, 27', 34''$, par l'angle

$$\tfrac{1}{251} \cdot 360^\circ = 1^\circ. 23', 48''$$

d'où l'on conclut le mouvement pour un an entier de 288°.

Pour le ſecond Satellite ayant $p = 9h$ & $8pp = 648hh$, ſes abſides avanceront pendant chaque révolution, ou dans l'eſpace de $3^j. 13^h, 13', 42''$, par l'angle

$$\tfrac{1}{649} \cdot 360^\circ = 33', 17''$$

& partant pendant un an entier par $57^\circ, 3'$.

Pour le troiſieme Satellite nous avons $p = 14\tfrac{1}{3}h$, donc $8pp = 1643$, & partant ſes abſides avanceront pendant chaque révolution, qui eſt de $7^j, 3^h, 42', 36''$, par l'angle

$$\tfrac{1}{1644} \cdot 360^\circ = 13', 8''$$

& partant pendant un an entier par $11^\circ. 10'$.

Pour le quatrieme Satellite ayant $p = 25\tfrac{1}{4}h$, & $8pp = 5100$, ſes abſides avanceront pendant chaque révolution, qui eſt de $16^j, 16^h, 32', 9''$, par l'angle

$$\tfrac{1}{5101} \cdot 360^\circ = 4', 14''$$

donc pendant un an entier par $1^\circ, 32', 40''$.

17. Quoique nous n'ayons pas aſſez de certitude ſur le degré d'applatiſſement du corps de Jupiter, & qu'une petite erreur puiſſe très conſidérablement altérer ces déterminations, il eſt toujours certain que le mouvement des abſides, qui eſt produit par cette cauſe, doit être très rapide, ſurtout pour le premier Satellite, dont les abſides avancent chaque année par 288°. Cette rapidité devroit produire un effet bien étrange, ſi l'orbite de ce Satellite n'étoit pas à peu près circulaire, car, dans le cas où l'orbite eſt circulaire, ou $q = 0$, le mouvement ne laiſſe pas d'être uniforme, tout comme dans l'hypotheſe ordi-

ordinaire, & l'applatiſſement du corps de Jupiter n'y produira aucun dérangement. Mais dès que l'orbite d'un Satellite a une excentricité aſſez conſidérable, ce mouvement des abſides doit cauſer de grandes irrégularités dans le mouvement du Satellite, & on n'en ſauroit calculer les apparitions, à moins qu'on n'ait une exacte connoiſſance de cet élément. Il eſt auſſi bien remarquable que ce mouvement des abſides diminue ſi ſubitement pour de plus grandes diſtances, de ſorte que s'il y avoit un Satellite éloigné du centre de Jupiter de 60 demi-diametres, le mouvement des abſides ſeroit preſque imperceptible, au lieu que les autres cauſes qui font avancer les abſides produiſent un effet tout à fait contraire.

18. Mais voyons auſſi comment le vrai lieu du Satellite peut être déterminé; pour cet effet on n'a qu'à chercher l'anomalie vraie s pour un tems propoſé quelconque, & indiqué par l'angle ζ qui lui eſt proportionnel. Or ayant trouvé

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\mathrm{d}\zeta\sqrt{2ne^3}\mathrm{E}}{vv} = \frac{\mathrm{d}\zeta(1+q\cos s)^2\sqrt{ne^3}(pp+\frac{1}{2}(cc-aa)(3+qq))}{pp\sqrt{p}}$$

& auſſi $\mathrm{d}\Phi = \dfrac{\mathrm{d}s\sqrt{(pp+\frac{1}{2}(cc-aa)(3+qq))}}{\sqrt{(pp-\frac{1}{2}(cc-aa)(3+2q\cos s-qq))}}$

le rapport entre ζ & s ſera exprimé par cette équation

$$\mathrm{d}\zeta = \frac{pp\sqrt{p}}{\sqrt{ne^3}} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{(1+q\cos s)^2\sqrt{(pp-\frac{1}{2}(cc-aa)(3+2q\cos s-qq))}}$$

laquelle, à cauſe de $cc - aa$ très petit par rapport à pp, ſe réduit à

$$\mathrm{d}\zeta = \frac{\sqrt{p^3}}{\sqrt{ne^3}} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{(1+q\cos s)^2}\left(1 + \frac{(cc-aa)(3+2q\cos s-qq)}{4pp}\right)$$

pour l'équation de laquelle on a

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{(1+q\cos s)^2} = \frac{1}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{A}\,n\cos\frac{q+\cos s}{1+q\cos s} - \frac{q\sin s}{(1+qq)(1+q\cos s)}\ \&$$

 $\int \mathrm{d}s$

$$\int \frac{ds\cos s}{(1+q\cos s)^2} = \frac{\sin s}{(1-qq)(1+q\cos s)} - \frac{q}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{A}n\cos\frac{q+\cos s}{1+q\cos s}$$

d'où l'on trouve

$$\zeta\sqrt{\frac{ne^3}{p^3}} = \text{Conft.} + \frac{1}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{A}n\cos\frac{q+\cos s}{1+q\cos s} - \frac{q\sin s}{(1-qq)(1+q\,\mathrm{c}.s)}$$
$$+ \frac{3(cc-aa)}{4pp\sqrt{(1-qq)}}\,\mathrm{A}n\cos\frac{q+\cos s}{1+q\cos s} - \frac{(cc-aa)q\sin s}{\mathrm{A}pp(1+q\,\mathrm{c}.s)}.$$

Enfuite pofant la longitude de l'abfide pour le tems propofé $= \eta$, on aura la longitude du Satellite

$$\varphi = \eta + s + \frac{(cc-aa)\,q\sin s}{2pp}.$$

19. Puifque l'excentricité q eft très petite, le calcul fe fait plus commodément par approximation. Ayant donc

$$\frac{1}{(1+q\cos s)^2} = \frac{1}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}\left(1-2q\cos s+\tfrac{3}{2}qq\cos 2s-q^3\cos 3s\right).$$

Si nous pofons $\frac{p}{1-qq} = r$, de forte que r fignifie le demi-axe de l'orbite, & pour abréger $\frac{cc-aa}{4pp} = m$, nous aurons

$$d\zeta = \frac{\sqrt{r^3}}{\sqrt{ne^3}}\cdot ds\begin{cases} 1 \quad - 2q\cos s \quad + \tfrac{3}{2}qq\cos 2s - q^3\cos 3s \\ +m(3-qq) - 2mq(3-qq)\,\mathrm{c}.s + \tfrac{3}{2}mqq\,\mathrm{c}.2s - 3mq^3\,\mathrm{c}.3s \\ \quad - 2mqq + 2mq\cos s - 2mqq\,\mathrm{c}.2s + \tfrac{3}{2}mq^3\,\mathrm{c}.3s \\ \quad\quad + \tfrac{3}{2}mq^3\cos s \end{cases}$$

ou bien

$$d\zeta\sqrt{\frac{ne^3}{r^3}} = ds\left(1+3m(1\cdot qq) - \quad 2q\cos s \quad + \tfrac{3}{2}qq\cos 2s - q^3\cos 3s \atop -4mq(1\cdot\tfrac{7}{8}qq)\,\mathrm{c}.s + \tfrac{3}{2}mqq\,\mathrm{c}.2s - \tfrac{3}{2}mq^3\,\mathrm{c}.3s\right)$$

donc

donc prenant les intégrales

$$\zeta\sqrt{\frac{ne^3}{r^3}} = s\,(1 + 3m(1 - qq)) - 2q\sin s + \tfrac{3}{4}qq\sin 2s - \tfrac{1}{3}q^3\sin 3s$$
$$- 4mq\sin s + \tfrac{3}{4}mqq\sin 2s - \tfrac{1}{2}mq^3\sin 3s$$

ou bien à peu près

$$\frac{\zeta}{1+3m}\sqrt{\frac{ne^3}{r^3}} = s - \frac{2(1+2m)}{1+3m}q\sin s + \frac{(3+5m)}{4(1+3m)}qq\sin 2s - \frac{(2+3m)}{6(1+3m)}q^3\sin 3s$$

ou $\frac{\zeta}{1+3m}\sqrt{\frac{ne^3}{r^3}}$ peut être regardée comme l'anomalie moyenne, qui croît uniformément avec le tems; si nous la posons $= \tau$ nous aurons:

$$\tau = s - \frac{2(1+2m)}{1+3m}q\sin s + \frac{(3+5m)}{4(1+3m)}qq\sin 2s - \frac{(2+3m)}{6(1+3m)}q^3\sin 3s$$

d'où l'on connoit l'anomalie vraie s, qui convient à la moyenne τ, l'équation du centre étant

$$\frac{2(1+2m)}{1+3m}q\sin s - \frac{(3+5m)}{4(1+3m)}qq\sin 2s + \frac{(2+3m)}{6(1+3m)}q^3\sin 3s$$

& $s = \tau +$ Equation du centre.

Ensuite on aura

$$\Phi = \eta + \tau + \text{Equation du centre} + 2mq\sin s$$

où $\eta + \tau$ marque la longitude moyenne & Φ la vraie. Enfin la distance du Satellite au centre de Jupiter est $v = \frac{p}{1 + q\cos s}$.

20. Jusqu'ici j'ai supposé que le Satellite se meuve exactement dans le plan de l'équateur de Jupiter; je m'en vai donc aussi déterminer les dérangemens qui proviennent de la figure applatie du corps

corps de Jupiter, lorſque l'orbite du Satellite eſt inclinée au plan de l'équateur de Jupiter, ou lorſque la coordonnée z n'eſt pas évanouiſſante. Pour ce cas nous n'avons qu'à conſidérer les trois équations différentio-différentielles rapportées au §. 11. d'où nous tirons dabord en les combinant ces équations:

$$\text{I.}\quad y\,ddx - x\,ddy = 0;$$

$$\text{II.}\quad z\,ddy - y\,ddz = \frac{3n(cc-aa)\,e^3 d\zeta^2}{v^5}\cdot yz;$$

$$\text{III.}\quad z\,ddx - x\,ddz = \frac{3n(cc-aa)\,e^3 d\zeta^2}{v^5}\cdot xz,$$

& encore celle-ci:

$$2dx\,ddx + 2dy\,ddy + 2dz\,ddz = -2ne^3 d\zeta^2\left(\frac{dv}{vv} + \frac{3(cc-aa)dv}{2v^4} + \tfrac{3}{2}(cc-aa)\left(\frac{2z\,dz}{v^5} - \frac{5zz\,dv}{v^6}\right)\right),$$

qui donne par l'intégration:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 2ne^3 d\zeta^2\left(C + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3} - \frac{3(cc-aa)zz}{2v^5}\right).$$

21. Pour ramener ces quantités aux élémens dont on ſe ſert
Fig. 6. en Aſtronomie, ſoit Zz l'eſpace que le Satellite parcourt dans le tems dt, auquel répond l'angle $d\zeta$, & on aura $Zz^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Or ayant $Iz = v + dv$, ſi nous poſons l'angle élémentaire $ZIz = d\Phi$, nous aurons auſſi $Zz^2 = dv^2 + vv\,d\Phi^2$, d'où notre derniere équation prendra cette forme:

$$dv^2 + vv\,d\Phi^2 = 2ne^3 d\zeta^2\left(C + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3} - \frac{3(cc-aa)zz}{2v^5}\right).$$

Que le plan ZIz, dans lequel le Satellite ſe meut actuellement, coupe le plan de l'équateur de Jupiter par la droite IN qui ſera la ligne des nœuds, dont la longitude ſoit ou l'angle $XIN = \psi$, l'inclinaiſon $= \omega$,

$= \omega$, & l'angle NIZ $= u$, qui fera l'argument de latitude. Qu'on tire de Z & Y à la ligne IN les perpendiculaires ZN & YN, & l'angle ZNY fera égal à l'inclinaifon ω. Donc, ayant tiré du triangle ZIN les lignes IN $= v \operatorname{cof} u$, & ZN $= v \operatorname{fin} u$, nous aurons YN $= v \operatorname{fin} u \operatorname{cof} \omega$ & ZY $= v \operatorname{fin} u \operatorname{fin} \omega = z$. Enfuite l'angle XIN $= \psi =$ XYN fournit

$$IX = x = v \operatorname{cof} u \operatorname{cof} \psi - v \operatorname{fin} u \operatorname{cof} \omega \operatorname{fin} \psi \quad \&$$

$$XY = y = v \operatorname{cof} u \operatorname{fin} \psi + v \operatorname{fin} u \operatorname{cof} \omega \operatorname{cof} \psi.$$

22. Puifque la différentiation tranfporte le point Z en z, il eft clair qu'on doit trouver les mêmes valeurs des différentiels dx, dy & dz, foit qu'on regarde la ligne des nœuds IN avec l'inclinaifon comme conftantes, foit qu'on tienne compte de leur variabilité. Or, en confidérant les angles ψ & ω comme conftans, l'angle NIZ $= u$ croit de l'angle ZIz $= d\Phi$, de forte que dans ce cas il faut mettre $du = d\Phi$, & partant nous aurons:

$$dz = dv \operatorname{fin} u \operatorname{fin} \omega + v d\Phi \operatorname{cof} u \operatorname{fin} \omega = \frac{z dv}{v} + v d\Phi \operatorname{cof} u \operatorname{f} \omega$$

$$dx = \frac{x dv}{v} - v d\Phi (\operatorname{fin} u \operatorname{cof} \psi - \operatorname{cof} u \operatorname{cof} \omega \operatorname{fin} \psi)$$

$$dy = \frac{y dv}{v} - v d\Phi (\operatorname{fin} u \operatorname{fin} \psi - \operatorname{cof} u \operatorname{cof} \omega \operatorname{cof} \psi).$$

De là nous tirons

$$y dx - x dy = - vv d\Phi \operatorname{cof} \omega \quad \text{ou} \quad x dy - y dx = vv d\Phi \operatorname{cof} \omega$$

$$z dy - y dz = - vv d\Phi \operatorname{fin} \omega \operatorname{f} \psi \quad \text{ou} \quad y dz - z dy = vv d\Phi \operatorname{fin} \omega \operatorname{fin} \psi$$

$$z dx - x dz = - vv d\Phi \operatorname{f} \omega \operatorname{cof} \psi \quad \text{ou} \quad x dz - z dx = vv d\Phi \operatorname{f} \omega \operatorname{cof} \psi.$$

23. Si nous fubftituons ces valeurs dans nos équations précédentes, nous trouverons:

I. $d.(vv d\Phi \operatorname{cof} \omega) = 0$

II. $d.(vv\,d\Phi\,\text{ſin}\,\omega\,\text{ſin}\,\psi) = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3}\,\text{ſin}\,u\,\text{ſ}\omega(\text{coſ}\,u\,\text{ſ}\psi + \text{ſin}\,u\,\text{coſ}\,\omega\,\text{coſ}\,\psi)$

III. $d.(vv\,d\Phi\,\text{ſin}\,\omega\,\text{coſ}\,\psi) = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3}\,\text{ſin}\,u\,\text{ſ}\omega(\text{coſ}\,u\,\text{c}.\psi - \text{ſin}\,u\,\text{coſ}\,\omega\,\text{ſin}\,\psi)$

dont les deux dernieres donnent par leur combinaiſon

$$d.(vv\,d\Phi\,\text{ſin}\,\omega) = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3}\,\text{ſin}\,u\,\text{coſ}\,u\,\text{ſ}\omega$$

& $$vv\,d\Phi\,d\psi\,\text{ſin}\,\omega = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3}\,\text{ſin}\,u^2\,\text{ſin}\,\omega\,\text{coſ}\,\omega.$$

Or celle-là étant combinée avec la premiere donne

$$d.(vv\,d\Phi) = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3}\,\text{ſin}\,u\,\text{coſ}\,u\,\text{ſin}\,\omega^2$$

& $$vv\,d\Phi\,d\omega = -\frac{3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2}{v^3}\,\text{ſin}\,u\,\text{coſ}\,u\,\text{ſin}\,\omega\,\text{coſ}\,\omega$$

de ſorte que

$$d\psi = \frac{-3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2\,\text{ſin}\,u^2\,\text{coſ}\,\omega}{v^5 d\Phi}$$

& $$d\omega = \frac{-3n(cc-aa)e^3 d\zeta^2\,\text{ſin}\,u\,\text{coſ}\,u\,\text{ſin}\,\omega\,\text{coſ}\,\omega}{v^5 d\Phi}.$$

Mais l'équation déjà une fois intégrée fournit

$$dv^2 + vv\,d\Phi^2 = 2ne^3 d\zeta^2\left(C + \frac{1}{v} + \frac{cc-aa}{2v^3}(1 - 3\,\text{ſ}u^2\,\text{ſ}\omega^2)\right).$$

24. Or, ſi nous tenons compte de la variabilité des angles ψ & & ω, où du n'eſt plus égal à $d\Phi$, il faut que les mêmes valeurs pour dx, dy & dz en réſultent. Trouvant donc

$$dz = dv\,\text{ſ}u\,\text{ſ}\omega + v\,du\,\text{coſ}\,u\,\text{ſ}\omega + v\,d\omega\,\text{ſ}u\,\text{coſ}\,\omega$$

puiſ-

puisque $dz = dv\, s u\, s\omega + v d\phi \cos u\, s\omega$, nous en concluons

$$d\phi = du + \frac{d\omega \sin u \cos\omega}{\cos u \sin\omega}.$$

En comparant de la même maniere les différentiels dx & dy avec les valeurs précédentes, nous obtiendrons

$$(d\phi - du)(s u \cos\psi + \cos u \cos\omega\, s\psi) - d\psi(\cos u\, s\psi + s u \cos\omega\, c.\psi)$$
$$+ d\omega \sin u \sin\omega \sin\psi = 0$$
$$(d\phi - du)(\sin u\, s\psi - \cos u \cos\omega\, c.\psi) - d\psi(\cos u\, c.\psi - s u \cos\omega\, s\psi)$$
$$- d\omega \sin u \sin\omega \cos\psi = 0.$$

Donc, puisque $d\phi - du = \frac{d\omega\, s u \cos\omega}{\cos u\, s\omega}$, l'une & l'autre donne

$$d\psi = \frac{d\omega \sin u}{\cos u\, s\omega}, \quad \text{donc } d\phi = du + d\psi \cos\omega$$

& c'est le même rapport qui a été trouvé dans l'article précédent.

25. Considérons l'équation $d.(vv d\phi) = \cdots$ qui étant multipliée par $2vv d\phi$ & intégrée donne:

$$v^4 d\phi^2 = 2ne^3 d\zeta^2 (D - 3(cc-aa)\int \frac{d\phi}{v} \sin u \cos u \sin\omega^2)$$

ou posant pour abréger $\int \frac{d\phi}{v} \sin u \cos u \sin\omega^2 = P$, & $cc - aa = mhh$, où la valeur de m est environ $\frac{1}{27}$, prenant h pour le demi-diametre de l'équateur de Jupiter, nous aurons

$$v^4 d\phi^2 = 2ne^3 d\zeta^2 (D - 3mhhP)$$

& partant l'équation intégrale:

$$dv^2 = 2ne^3 d\zeta^2 \left(C + \frac{1}{v} - \frac{(D - 3mhhP)}{vv} + \frac{mhh(1 - 3 s u^2 s\omega^2)}{2v^3}\right).$$

Posons maintenant $v = \frac{p}{1 + q\,\mathrm{cof}\,s}$, de sorte que s soit l'anomalie vraie, & cette circonstance nous fournit ces deux équations

$$C + \frac{1+q}{p} - \frac{(D - 3mhhP)(1+q)^2}{pp} + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(1+q)^3}{2p^3} = 0$$

$$C + \frac{1-q}{p} - \frac{(D - 3mhhP)(1-q)^2}{pp} + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(1-q)^3}{2p^3} = 0$$

d'où nous tirons:

$$\frac{2q}{p} - \frac{4q(D - 3mhhP)}{pp} + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)\,q\,(3+qq)}{p^3} = 0$$

& partant $D - 3mhhP = \frac{1}{2}p + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(3+qq)}{4p}$.

Ensuite, puisque

$$C + \frac{1}{p} - \frac{(D - 3mhhP)(1+qq)}{pp} + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(1+3qq)}{2p^3} = 0$$

nous aurons

$$C = \frac{-(1-qq)}{2p} + \frac{mhh(1-qq)^2(1 - 3\sin u^2 \sin\omega^2)}{4p^3}.$$

26. Ces valeurs étant substituées produisent

$$dv^2 = 2ne^3 d\zeta^2 \Big(\frac{qq\,\mathrm{f}s^2}{2p} - \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)}{4p^3} (3qq\,\mathrm{f}s^2 + 2q^3\,\mathrm{f}s^2\,\mathrm{cof}\,s - q^4\,\mathrm{f}s^2) \Big)$$

ou bien

$$dv^2 = \frac{ne^3 qq\, d\zeta^2\, \mathrm{f}s^2}{p} \Big(1 - \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)}{2pp} (3 + 2q\,\mathrm{c.}s - qq) \Big)$$

& par ce que j'ai montré ci-dessus:

$$d\Phi^2 = \frac{ne^3 d\zeta^2}{v^4} \Big(p + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)(3+qq)}{2p} \Big)$$

donc:

donc:

$$dv = \frac{q\,d\zeta\,\sin s}{p}\sqrt{ne^3}\left(p - \frac{mhh(1-3\sin u^2\sin\omega^2)(3+2q\,c.s-qq)}{2p}\right) \text{ ou}$$

$$\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\Phi\,\sin s}{p}\sqrt{\frac{2pp - mhh(1-3\sin u^2\sin\omega^2)(3+2q\cos s-qq)}{2pp+mhh(1-3\sin u^2\sin\omega^2)(3+qq)}} \quad \&$$

$$d\zeta\sqrt{ne^3} = \frac{vv\,d\Phi\sqrt{2p}}{\sqrt{(2pp + mhh(1-3\sin u^2\sin\omega^2)(3+qq))}}.$$

27. La différentiation des quantités constantes D & C donne:

$$-\frac{3mhh\,d\Phi\sin u\cos u\sin\omega^2}{v} = \tfrac{1}{2}dp + \tfrac{1}{4}mhh(1-3\sin u^2\sin\omega^2)d.\frac{3+qq}{p} - \frac{3mhh\,d\Phi\sin u\cos u\sin\omega^2}{2p}(3+qq)$$

ou bien

$$3mhh\,d\Phi\sin u\cos u\sin\omega^2.\frac{1-2q\cos s+qq}{p} = dp + \tfrac{1}{2}mhh\,(1 - 3\sin u^2\sin\omega^2)\,d.\frac{3+qq}{p}$$

& ensuite celle de C:

$$-d.\frac{1-qq}{p} + \tfrac{1}{2}mhh(1-3\sin u^2\sin\omega^2)\,d.\frac{(1-qq)^2}{p^3} - \frac{3mhh(1-qq)^2\,d\Phi\sin u\cos u\sin\omega^2}{p^3} = 0$$

d'où l'on pourroit déterminer tant dp que dq par l'élément dΦ. Mais, puisque les quantités p & q sont fort peu variables, devenant même constantes si $\omega = 0$, on aura assez exactement:

$$p\,dp = 3mhh\,d\Phi\,(1 - 2q\cos s + qq)\sin u\cos u\sin\omega^2$$

& posant le demi-axe $\frac{p}{1 - qq} = r$

$$\frac{\mathrm{d}r}{rr} = \frac{3mhh\,\mathrm{d}\phi \sin u \cos u \sin \omega^2}{prr} \quad \text{ou bien}$$

$$p\mathrm{d}r = 3mhh\,\mathrm{d}\phi \sin u \cos u \sin \omega^2.$$

Or $2rq\mathrm{d}q = \mathrm{d}r(1 - qq) - \mathrm{d}p$, d'où nous trouverons

$$pr\mathrm{d}q = 3mhh\mathrm{d}\phi\,(\cos s - q) \sin u \cos u \sin \omega^2.$$

28. Ensuite, puisque $\frac{1}{v} = \frac{1 + q\cos s}{p}$, nous aurons

$$\frac{\mathrm{d}v}{vv} = \frac{\mathrm{d}p(1 + q\cos s)}{pp} - \frac{\mathrm{d}q \cos s}{p} + \frac{q\mathrm{d}s\,\mathrm{s}s}{p}, \text{ \& partant}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{vv} = \frac{q\mathrm{d}s \sin s}{p} + \frac{3mhh\mathrm{d}\phi\,(1 + qq)\,\mathrm{s}u \cos u\,\mathrm{s}\omega^2\,\mathrm{s}s^2}{p^3}.$$

Or la valeur de $\frac{\mathrm{d}v}{vv}$ trouvée ci-dessus se réduit à cette forme

$$\frac{\mathrm{d}v}{vv} = \frac{q\mathrm{d}\phi \sin s}{p}\left(1 - \frac{mhh(3 + q\cos s)\,(1 - 3\,\mathrm{s}u^2\,\mathrm{s}\omega^2)}{2pp}\right)$$

ce qui donne

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}\phi - \frac{mhh(3 + q\cos s)\,(1 - 3\sin u^2\,\mathrm{s}\omega^2)}{2pp}\mathrm{d}\phi - \frac{3mhh(1 + qq)\sin u \cos u\,\mathrm{s}\omega^2\,\mathrm{s}s}{ppq}\mathrm{d}\phi.$$

Enfin, en négligeant les petits termes, & en substituant pour $nc^3\mathrm{d}\zeta^2$ sa valeur, nous aurons

$$\mathrm{d}\psi = \frac{-3mhh\,(1 + q\cos s)}{pp}\mathrm{d}\phi \sin u^2 \cos \omega \quad \&$$

dω

$$\mathrm{d}\omega = \frac{+\mathrm{d}\psi\,\mathrm{f}\omega}{\mathrm{tag}\,u} = \frac{-3mhh(1+q\,\mathrm{cof}\,s)}{pp}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{f}u\,\mathrm{cof}\,u\,\mathrm{f}\omega\,\mathrm{cof}\,\omega$$

& $\mathrm{d}u = \mathrm{d}\phi + \mathrm{d}\psi\,\mathrm{cof}\,\omega$

de forte que les différentiels de tous nos élémens font déterminés par $\mathrm{d}\phi$.

29. On peut parvenir à d'autres folutions dont la plus fimple paroît être celle qu'on tire de l'équation

$\mathrm{d}.(vv\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{cof}\,\omega) = 0$, qui donne $v^4\,\mathrm{d}\phi^2\,\mathrm{cof}\,\omega^2 = 2ne^3\mathrm{E}\,\mathrm{d}\zeta^2$

& partant $vv\,\mathrm{d}\phi^2 = \frac{2ne^3\mathrm{E}\,\mathrm{d}\zeta^2}{vv\,\mathrm{cof}\,\omega^2}$, fans qu'on ait befoin d'une quantité intégrale. Or cette formule ne fauroit avoir lieu quand l'inclinaifon ω approche fort d'un angle droit. De là nous aurons:

$$\mathrm{d}v^2 = 2ne^3\,\mathrm{d}\zeta^2\left(\mathrm{C} + \frac{1}{v} - \frac{\mathrm{E}}{vv\,\mathrm{c.}\,\omega^2} + \frac{mhh\,(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)}{2v^3}\right)$$

& pofant comme ci-deffus $v = \frac{p}{1 + q\,\mathrm{cof}\,s}$,

$$\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{cof}\,\omega^2} = \tfrac{1}{2}p + \frac{mhh(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)\,(3 + qq)}{4p} \quad \&$$

$$\mathrm{C} = \frac{-(1-qq)}{2p} + \frac{mhh(1 - qq)^2\,(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2)}{4p^3}$$

d'où l'on déduit enfuite comme ci-deffus:

$$\frac{\mathrm{d}v}{vv} = \frac{q\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{f}s}{p}\,\sqrt{\frac{2pp - mhh(3 + 2q\,\mathrm{cof}\,s - qq)(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2}{2pp + mhh(3 + qq)(1 - 3\,\mathrm{fin}\,u^2\,\mathrm{fin}\,\omega^2)}}$$

&

$$\mathrm{d}\zeta\sqrt{ne^3} = \frac{vv\,\mathrm{d}\phi\sqrt{2p}}{\sqrt{(2pp + mhh\,(3 + qq)\,(1 - 3\,\mathrm{f}u^2\,\mathrm{f}\omega^2))}}$$

dψ

$$\mathrm{d}\psi = \frac{-3mhh\,(1+q\cos s)}{pp}\,\mathrm{d}\phi \sin u^2 \cos\omega$$

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\mathrm{d}\psi \sin\omega}{\tan u}, \qquad \& \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}\phi + \mathrm{d}\psi \cos\omega.$$

30. De là on peut d'abord déterminer les quantités p & q, & puisque leur variabilité est très petite, nous les pourrons regarder comme constantes dans les petits termes affectés par mhh. Donc, si nous posons pour abréger $\frac{mhh(1-3\,su^2\,s\omega^2)}{2pp} = U$, nous aurons:

$$p\cos\omega^2 + p\,(3+qq)\,U\cos\omega^2 = f\cos\epsilon^2 \qquad \&$$

$$\frac{1-qq}{p} - \frac{(1-qq)^3\,U}{p} = \frac{1-kk}{f} \qquad \text{ou}$$

$$1 - qq = \frac{(1-kk)\,p}{f} + (1-qq)^3\,U$$

où f, k & ϵ sont presque les valeurs moyennes de p, q, & ω, & puisque U est une quantité très petite, il sera permis d'y mettre au lieu de p, q & ω, leurs valeurs moyennes, & en passant aux différentiels nous aurons:

$$\mathrm{d}U = \frac{-3mhh\,\mathrm{d}\phi \sin u \cos u \sin\omega^2}{pp}$$

$$\& \qquad \mathrm{d}\omega = \frac{-3mhh\,(1+q\cos s)\,\mathrm{d}\phi\, su \cos u\, s\omega \cos\omega}{pp}.$$

& partant

$$\mathrm{d}p\cos\omega^2 + \frac{6mhh\,(1+q\cos s)\,\mathrm{d}\phi\, su\cos u\, s\omega^2\cos\omega^2}{p} - \frac{3mhh\,(3+qq)\,\mathrm{d}\phi\, su\cos u\, s\omega^2\cos\omega^2}{p} = 0$$

$$\text{ou} \quad \mathrm{d}p = \frac{3mhh\,(1-2q\cos s+qq)\,\mathrm{d}\phi\, su\cos u\, s\omega^2}{p}$$

&

$$\& \quad 2q\,dq = \frac{3mhh(1-qq)^2\, d\Phi \int u \cos u \int \omega^2}{pp} - \frac{(1-kk)\,dp}{f}$$

donc, à cauſe de $\frac{dv}{vv} = \frac{dp(1+q\cos s)}{pp} - \frac{dq\cos s}{p} + \frac{q\,ds\int s}{p}$.

Or $\frac{dv}{vv} = \frac{q\,d\Phi \int s}{p} \sqrt{\frac{1-U(3+2q\cos s-qq)}{1+U(3+qq)}} = \frac{q\,d\Phi\int s}{p}(1-U(3+q\,c.s))$

d'où l'on tire

$$\frac{q\,d\Phi\int s}{p}(1-U(3+q\cos s)) = \frac{q\,ds\int s}{p} + \frac{3mhh(1+qq)\,d\Phi\int u\,c.u\int\omega^2\int s^2}{p^3}$$

ou bien

$$ds = d\Phi - U\,d\Phi(3+q\cos s) - \frac{3mhh(1+qq)\,d\Phi\int u\cos u\int\omega^2\int s}{ppq}$$

comme ci-deſſus, & enfin: $vv\,d\Phi^2 = \frac{ne^3 f\,d\zeta^2 \sin s^2}{vv\cos\omega^2}$ ou

$$d\zeta\sqrt{ne^3 f} = \frac{vv\,d\Phi\cos\omega}{\sin\epsilon}.$$

31. Comme je me borne ici à déterminer le mouvement de la ligne des abſides, dont la longitude dans l'orbite eſt $= \Phi = s$, je pourrai conſidérer dans les petits termes les quantités p, q & ω comme conſtantes, & $du = d\Phi$. Donc, puiſque $U = \frac{mhh}{2pp}(1-\frac{3}{2}\int\omega^2 + \frac{3}{2}\cos 2u\int\omega^2)$, nous aurons pour le mouvement moyen:

$$ds = d\Phi - \frac{3mhh\,d\Phi}{2pp}(1-\tfrac{3}{2}\sin\omega^2)$$

donc $$\Phi - s = \frac{3mhh}{2pp}(1-\tfrac{3}{2}\sin\omega^2)\Phi$$

d'où nous voyons que, pendant chaque révolution du Satellite, la ligne des abſides avance par un angle $= \frac{3mhh}{2pp}(1-\frac{3}{2}\int\omega^2)\,360° = \frac{mhh}{pp}$

(1 —

$(1 - \frac{3}{2} \sin \omega^2)$ 540°. Ce mouvement eſt donc plus lent, ſi l'orbite du Satellite eſt inclinée à l'équateur de Jupiter, que ſi elle eſt ſituée dans le même plan: & ſi l'inclinaiſon ω étoit $= 54°,44'$, la ligne des abſides perdroit tout ſon mouvement, qui iroit même en arriere ſi $\omega > 54°,44'$.

Donc, ſi l'orbite d'un Satellite eſt inclinée au plan de l'équateur de Jupiter d'un angle $= \varepsilon$, le mouvement de ſa ligne des abſides, déterminé ci-deſſus, doit être diminué dans la raiſon de 1 à $1 - \frac{3}{2} \sin \varepsilon^2$.

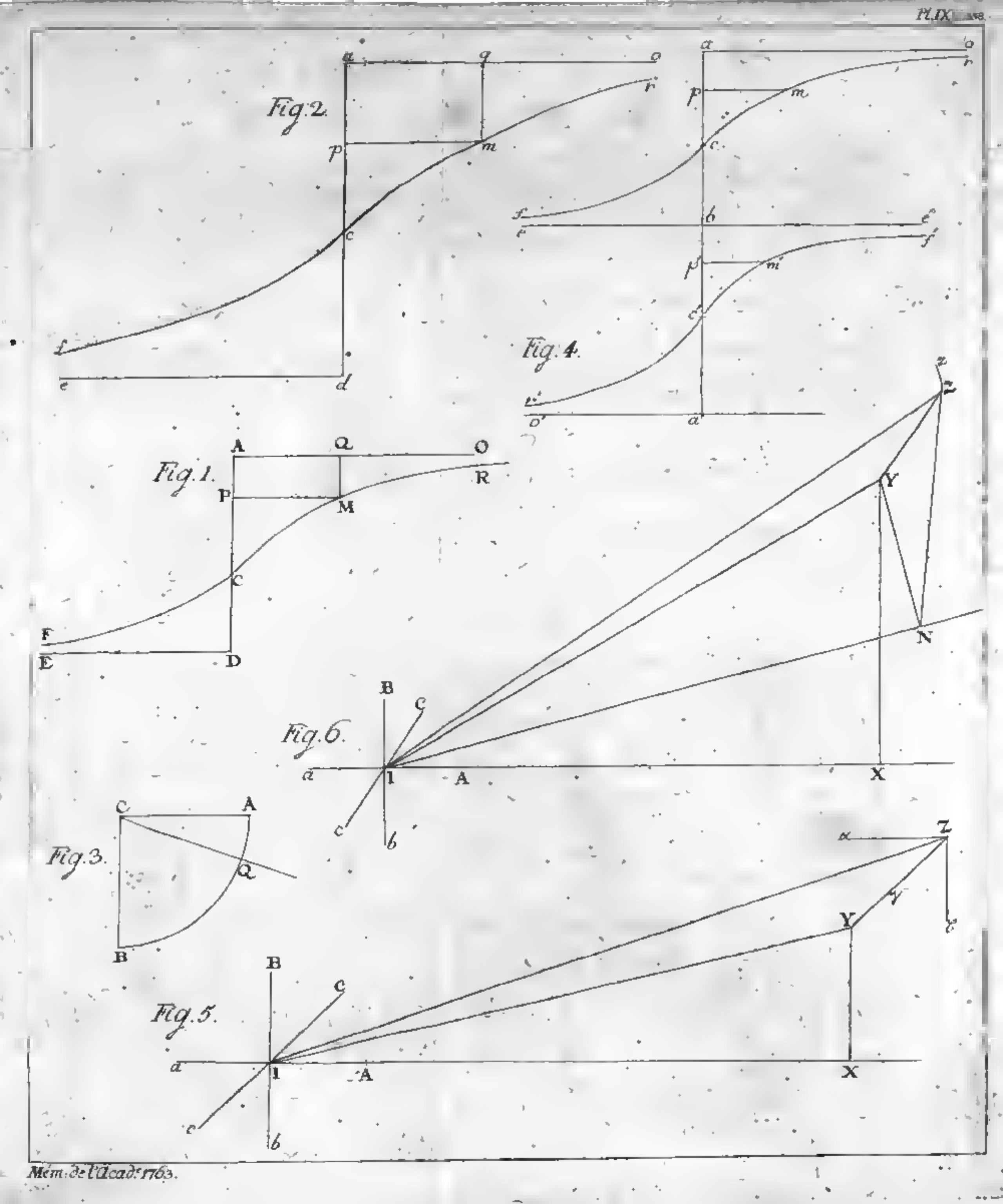
32. Au reſte il eſt auſſi évident que dans ce cas la ligne des nœuds doit avoir un mouvement en arriere. Car, ayant

$$d\psi = \frac{-3mhh(1 + q \cos s)}{pp} d\Phi (1 - \tfrac{1}{2} \cos 2v) \cos \omega,$$

ſon mouvement moyen ſera $d\psi = \frac{-3mhh}{pp} d\Phi \cos \omega$, & partant, pendant chaque révolution où $\Phi = 360°$, la ligne des nœuds reculera par un angle $= \frac{3mhh \cos \omega}{pp} . 360°$. Donc, ſi l'inclinaiſon ω eſt fort petite, le mouvement de la ligne des nœuds eſt deux fois plus rapide que celui de la ligne des abſides. Il ſera donc bien utile de déterminer exactement la poſition des orbites de chaque Satellite à l'égard de l'équateur de Jupiter, pour s'aſſurer combien ces déterminations ſont d'accord avec les obſervations, & ſi en effet l'applatiſſement du corps de Jupiter a une ſi grande influence dans le mouvement de ſes Satellites. Ce ſera le plus ſûr moyen de connoitre juſqu'à quel point la théorie de l'attraction univerſelle s'accorde avec les vrais mouvemens des corps céleſtes.



Mé-


Fig. 2.
a
q
o
r
p
m
c
f
e
d
Fig. 4.
Fig. 1.
A
Q
O
R
P
M
C
F
E
D
Fig. 6.
B
C
a
1
A
c
b
X
Y
Z
N
Fig. 3.
C
A
Q
B
Fig. 5.
B
C
a
1
A
c
b
X
Y
Z